MÓDULO 3 · RAZONES, PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

3.5



Tasas y razones de cambio

velocidad, precio por unidad y tasa de cambio

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

La pregunta de este capítulo

En el mercado hay dos bolsas de arroz:

una de 500 g a $2.400

otra de 3 kg a $13.800

la pequeña — la grande

«la de $13.800 es la más cara...»

¿Cuál sale más barata? Escriban su apuesta. Hoy:

comparar por unidad

Guárdenla: al final del capítulo la pagamos (p. 40).

En este capítulo van a...

- calcular e interpretar tasas con sus unidades (km/h, $ por gramo, pesos por dólar);
- comparar ofertas con la tasa unitaria, y no con los totales;
- hallar la razón de cambio entre dos momentos de una tabla o una gráfica.

Lo que ya saben

el cociente que se queda quieto ✓ bajar a uno ✓

de la Lección 3.2: $9.000 entre 5 kilos, $1.800 por kilo.

la clase en video
7:06 min

Palabras que van a usar

Antes de cualquier cuenta, estas son las palabras del capítulo; vuelvan a esta página cuando una se les olvide.

$60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

tasa
una razón entre magnitudes distintas; sus unidades dicen cómo leerla

$4,80 por g

tasa unitaria
la tasa por una sola unidad: el precio de un gramo, de un litro, de un huevo

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

razón de cambio
el cambio de la salida entre el cambio de la entrada, con unidades

$3.950 por US$

tasa de cambio
cuántos pesos vale un dólar (u otra moneda)



Lo que ya saben de la Lección 3.2: el cociente que se queda quieto, $1.800 por kilo.

De la Lección 3.2 ya traen el cociente que se queda quieto: precio entre kilos, $1.800 por kilo. Ese cociente, con sus unidades, es lo que hoy vamos a llamar **tasa**.

En el aula, con las manos

Traigan dos empaques del mismo producto en tamaños distintos (arroz, aceite, detergente) con su precio. Antes de calcular, cada uno apuesta cuál sale más barato; después, todos bajan a una unidad.

1 La tasa por unidad

en el video: **0:56**



Comparar precios es comparar tasas, no totales.

Miren el velocímetro: 60 kilómetros por hora son 60 kilómetros **por cada hora**. Una tasa compara dos magnitudes distintas, y sus unidades dicen cómo leerla. Y cuando es por una sola unidad se llama **tasa unitaria**: el precio de un gramo, de un litro, de un huevo.

La idea del capítulo

Una tasa es una razón entre magnitudes distintas, y sus unidades dicen cómo leerla. Para comparar ofertas, se baja a **una unidad**. La razón de cambio entre dos momentos es

$$\frac{\text{cambio en la salida}}{\text{cambio en la entrada}}$$

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 1 Aceite: ¿uno o tres litros?

1:17 (1) 2 3 resuelto, para mirar

Aceite de 1 litro a $9.800, o de 3 litros a $27.600.

① 1 L = $9.800 por litro

② 3 L = $27.600 ÷ 3 = $9.200 por litro

③ más barato = el de 3 litros

Ejercicio 2 Huevos: ¿paquete o bandeja?

1:37 1 (2) 3 complétenlo

Seis huevos a $4.200, o treinta a $19.500. ¿Cuánto vale un huevo en cada uno?

① paquete = $4.200 ÷ 6 = _____ por huevo

② bandeja = $19.500 ÷ 30 = _____ por huevo

③ conviene = _____

Ejercicio 3 Planes de datos

2:28 1 2 (3) sin ayuda

Un plan de 8 gigas por $35.000, u otro de 20 gigas por $80.000. ¿Cuál sale mejor por giga?

2 Totales que engañan

en el video: **2:57**

Piénsenlo antes de seguir tapen lo de abajo con una hoja

¿Verdadero o falso? Un bus recorre 180 km en 4 horas, y otro, 100 km en 2 horas. El primero va más rápido. V F

Falso. Mucha gente cree que el que más recorre es el más rápido, porque 180 se ve más grande. Pero piénsenlo por hora: el primero hace 45 kilómetros en cada hora, y el segundo, 50.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM



Más kilómetros no es más rápido, si se tardó más.

⊗ Así lo escribió un compañero

180 km es más que 100 km, «así que el primero va más rápido»

✓ Así es

$180 \div 4 = 45$ km/h $100 \div 2 = 50$ km/h: va más rápido el segundo

Por qué: se compararon totales cuando los tiempos no eran iguales. Para comparar, se baja a una hora: la tasa.

Comparar totales engaña cuando los tiempos (o las cantidades) no son iguales. Y otro tropiezo: dar la tasa al revés. $4 \div 180$ da horas por kilómetro, y eso no es la velocidad.



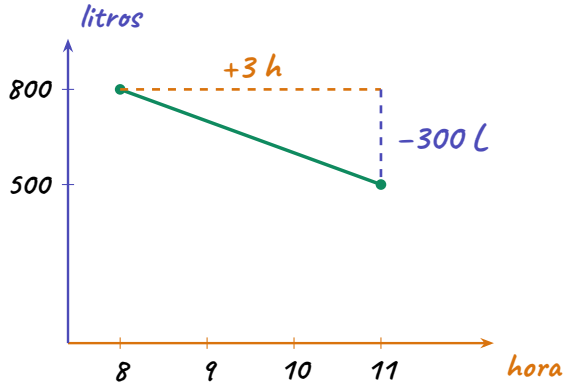
Ojo. Las unidades dicen el orden: kilómetros **por** hora es kilómetros entre horas. Si la cuenta da «horas por kilómetro», está al revés.

en el video: **3:54**

3 La razón de cambio

Ahora, la razón de cambio entre dos momentos. Un tanque tiene 800 litros a las 8 y 500 litros a las 11. En la gráfica, el triángulo lo muestra: lo que cambian los litros entre lo que cambian las horas. Menos 300 litros en 3 horas.

hora	litros
8	800
11	500
+3	−300



Ejercicio 4 El tanque

4:14 (1) 2 3 resuelto, para mirar

① cambio de litros = 500 − 800 = −300

② cambio de horas = 11 − 8 = 3

③ razón de cambio = −300 ÷ 3 = −100 L por hora

¿y el signo menos? Dice que se vacía.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 5 La planta

4:31 (1) (2) (3) complétenlo

Una planta mide 12 cm el día 3 y 27 cm el día 8. ¿Cuántos centímetros crece por día?

① razón de cambio = (27 − 12) ÷ (8 − ☐)

② = 15 ÷ ☐ = ☐ cm por día

Ejercicio 6 El pueblo

5:00 (1) (2) (3) sin ayuda

Un pueblo pasa de 4200 habitantes en 2015 a 5100 en 2024. ¿Cuántos habitantes por año?

De motores

Un carro pasa de 0 a 100 km/h en 10 segundos, y una moto, de 0 a 60 km/h en 5 segundos. ¿Cuál acelera más? $100 \div 10 = 10$ km/h en cada segundo; $60 \div 5 = 12$ km/h en cada segundo: acelera más la moto. La aceleración es la razón de cambio de la velocidad.

Para practicar, en el cuaderno de trabajo: 72 km/h en metros por segundo y el dólar de ida y vuelta. En el quiz, una gráfica del dólar en una semana.

Para recordar

1. Una tasa compara dos magnitudes distintas, y sus unidades dicen cómo leerla.
2. Para comparar ofertas, bajen a una unidad.
3. La razón de cambio es el cambio de la salida entre el cambio de la entrada.

Las tres reglas del minuto 5:54 del video, con las mismas palabras.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

en el video: **6:14**



¡Pregunta pagada! Comparar precios es comparar tasas, no totales.

Soluciones

Ej. 2. $700 y $650 por huevo: conviene la bandeja.

Ej. 3. $4.375 contra $4.000 por giga: el de 20 gigas.

Ej. 5. (27 − 12) ÷ (8 − 3) = 15 ÷ 5 = 3 cm por día.

Ej. 6. 900 ÷ 9 = 100 habitantes por año.

Piénsenlo: falso; 45 contra 50 km/h.

✓ La respuesta

$2.400 entre 500 gramos: **$4,80 el gramo**. $13.800 entre 3000 gramos: **$4,60 el gramo**. Sale más barata la bolsa grande, aunque cueste más, porque comparar precios es comparar tasas, no totales. Si apostaron la grande, acertaron.

bolsa	gramos	pesos	pesos por gramo
pequeña	500	2.400	4,80
grande	3000	13.800	4,60

Para qué les sirve

En 10.º y 11.º, en «Razón de cambio: velocidad media, densidad y otras magnitudes que se dividen» (Mate 10·11 · 2.2), y es la misma idea que después se llama *pendiente*. **Lo que sigue:** el repaso tipo Saber del módulo y, después, la Lección 4.1: raíces cuadradas y cúbicas.

Para seguir estudiando

Recursos

escaneen con la cámara del celular

La clase — video de 7:06, en la lección del curso

El short — el error típico en un minuto

La lista — todas las clases del módulo

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Prompts para estudiar con IA

Péguenlos en un asistente de IA: están escritos para que la IA les **pregunte**, no para que les responda.

1. Estoy aprendiendo tasas. Deme 5 pares de ofertas del supermercado, una por una, y antes de que yo calcule pregúnteme cuál apuesto que sale más barata y a qué unidad voy a bajar. No me dé el resultado.

2. Muéstreme una tabla con dos momentos (hora y litros, día y centímetros) y pídame la razón de cambio con sus unidades. Si me equivoco en el orden o en el signo, pregúnteme qué cambió primero.

3. Le voy a explicar con mis palabras por qué la bolsa de $13.800 sale más barata. Hágame preguntas como un profesor hasta que yo mismo encuentre lo que me falte. No me corrija con la respuesta.

🔍 La IA también se equivoca con las unidades: revisen que diga «por» en el orden correcto.



Si la IA les suelta la respuesta, escríbanle: «No me la diga; deme solo una pista».

Referencias

Contenido Ficha P3-L5 del curso (v2 auditada) y guion del video P3-L5-clase (auditado). Marecek, L., Anthony-Smith, M. y Honeycutt Mathis, A. (2020). *Prealgebra* (2.ª ed.). OpenStax (CC BY 4.0). §5.6 «Ratios and Rate», PDF p. 449: tasa unitaria y precio unitario.

Saber 11 Icfes (2019). *Marco de referencia de la prueba de Matemáticas Saber 11.°*, tabla 1, p. 33: «relaciones lineales y afines y razones de cambio (tasas de interés, tasas cambiarias, velocidad, aceleración…)».

La tasa al revés Ryan, J. y Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15*. Open University Press. Apéndice 1, p. 209: invertir los términos de una razón («reverses the terms of the problem», 5 %). Comparar totales en vez de tasas no tiene estudio propio en el corpus del curso.

Currículo MEN (2006). *Estándares básicos de competencias*, pp. 84-85 (67N1, 67V1, 67M4). MEN (2016). *DBA Matemáticas* V.2: 6.º DBA 8 (p. 49) y 7.º DBA 6 (p. 56).

Didáctica Muller (2008), p. 199 (PDF 219): predecir antes de ver. Sweller, Ayres y Kalyuga (2011), p. 172 (PDF 192): resuelto, con hueco, sin ayuda.

Imágenes Bolsa de arroz: 01x07x2022000, Wikimedia Commons, «Bag of rice 20221028 150305.jpg», CC0. Zumbi, tabla, gráfica del tanque e íconos pixel: dibujados por código (*CREDITOS.md*).

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Sus notas: dudas para llevar a la clase

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM