MÓDULO 1 · NÚMEROS NATURALES, CONJUNTOS Y ENTEROS

1.2

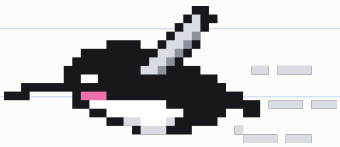
Propiedades de las operaciones

por qué 25 × 36 se puede hacer de cabeza

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

La pregunta de este capítulo

¿Cuánto es



$$25 \times 36 = ?$$

sin calculadora y sin la multiplicación larga?

Hay una forma de hacerla de cabeza en cinco segundos.

6 filas de 8: $6 \times 8 = 48$





Guárdenla: al final del capítulo la resolvemos (p. 16).

En este capítulo van a...

- reconocer la conmutativa, la asociativa y los neutros;
- usar la distributiva, $a(b+c) = ab + ac$;
- calcular de cabeza partiendo un factor.

Lo que ya saben

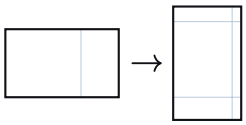
las tablas ✓ el área de un rectángulo ✓

largo por ancho: tres filas de cinco baldosas son quince.

la clase en video
7:28 min

Palabras que van a usar

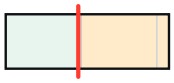
Estas son las palabras del capítulo. Todas dicen lo mismo: **qué cambios no alteran el resultado**. Cada una tiene su dibujo; vuelvan a esta página cuando una se les olvide.



conmutativa
cambiar el **orden**: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$



asociativa
cambiar la **agrupación**: $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$



distributiva
repartir: $3(4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

$$a + 0 = a$$
$$a \cdot 1 = a$$

elementos neutros
el 0 para sumar y el 1 para multiplicar: no cambian nada



Primero las palabras, después las cuentas: así el método no se mezcla con vocabulario nuevo.

Lo que ya saben. El área de un rectángulo es **largo por ancho**. Tres filas de cinco baldosas son $3 \times 5 = 15$ baldosas. Con ese dibujo se explican todas las propiedades de este capítulo. En álgebra, el signo «por» se escribe con un punto: $3 \cdot 5$; y sin nada entre una letra y un paréntesis: $a(b + c)$ quiere decir $a \cdot (b + c)$.

En el aula, con las manos

Cada grupo recorta de una hoja cuadriculada un rectángulo de 3×9 cuadritos. Primero cuentan los cuadritos; después lo cortan con unas tijeras por una línea vertical cualquiera y cuentan los dos pedazos. Comparen los resultados de todos los grupos: los cortes son distintos, el total es el mismo.

Si no hay tijeras, sirve doblar la hoja por la línea del tajo.

en el video: **0:37**

1 Cambiar sin alterar

El orden: la propiedad conmutativa

Giren el rectángulo de tres filas de cinco: ahora es de cinco filas de tres, y siguen siendo quince baldosas. **El orden de los factores no cambia el producto**: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Con la suma, igual: $4 + 9 = 9 + 4$.



Girar el rectángulo no quita ni pone ninguna baldosa.

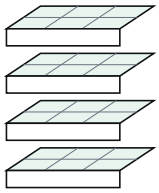
PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM



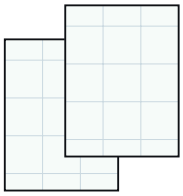
$3 \cdot 5 = 15$ $\qquad$ $5 \cdot 3 = 15$

La agrupación: la propiedad asociativa

Una caja de $2 \times 3 \times 4$ cubitos. Si agrupan primero $2 \cdot 3$, son capas de 6: cuatro capas, 24. Si agrupan primero $3 \cdot 4$, son dos placas de 12: otra vez 24. **Mover los paréntesis no cambia el producto.**



4 capas de 6



2 placas de 12

$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ $\qquad$ $2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$

Conmutativa, asociativa y neutros

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$ $\qquad$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\qquad$ $a + 0 = a$

$a \cdot 1 = a$

$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ $\qquad$ $2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$

Sumar cero y multiplicar por uno no cambian nada: por eso se llaman neutros.

Piénsenlo antes de seguir

tapen lo de abajo con una hoja

¿Verdadero o falso? $8 - 3$ es lo mismo que $3 - 8$. V F

⊗ Así lo escribió un compañero

$8 - 3 = 3 - 8$

✓ Así es

$8 - 3 = 5$, y $3 - 8$ no da 5

Por qué: la resta y la división **no** son conmutativas. Cuánto da $3 - 8$ lo verán con los enteros, en la Lección 1.7. Con la división, igual: $12 \div 4 = 3$, pero $4 \div 12$ no es 3.

2 El tajo

en el video: **2:04**

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM



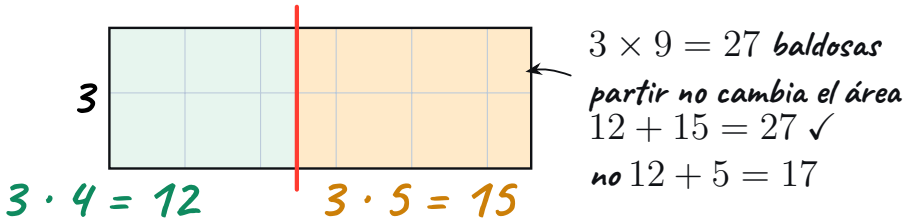
Tapen lo de abajo y decidan antes de seguir leyendo.

Ahora, una con trampa.

Piénsenlo antes de seguir — tapen lo de abajo con una hoja

¿Verdadero o falso? $3 \cdot (4 + 5) = 12 + 5$ V F

Lo del paréntesis vale 9: es un rectángulo de 3×9, **27 baldosas**. Ahora, un tajo después de la cuarta columna. Quedan dos rectángulos: $3 \times 4 = 12$ y $3 \times 5 = 15$. Doce más quince: 27, no 17.



⊗ Así lo escribió un compañero

$3 \cdot (4 + 5) = 12 + 5 = 17$

✓ Así es

$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$
$= 12 + 15 = 27$

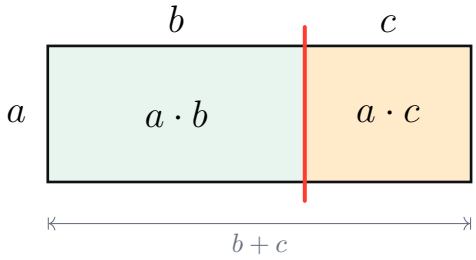
Por qué: el 12 + 5 multiplicó solo al 4. Pero el 3 multiplica al 4 y también al 5: partir el rectángulo no cambia su área.

La idea del capítulo: la propiedad distributiva

$$a(b + c) = ab + ac \qquad a(b - c) = ab - ac$$

El número de afuera multiplica a **cada** sumando. Y con la resta funciona igual.

Se lee: «a por, entre paréntesis, be más ce, es a por be más a por ce».



Un rectángulo de alto a y largo $b + c$ tiene área $a(b + c)$. El tajo lo parte en $a \cdot b$ y $a \cdot c$: **el área no cambia**.

Para qué sirve: partir un factor

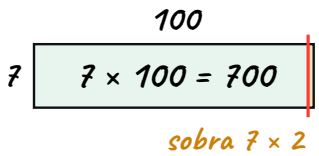
Con la distributiva, una multiplicación difícil se parte en dos fáciles. El

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

truco es partir un factor en un número redondo más (o menos) un pedacito.

Ejercicio 1 Siete por noventa y ocho

3:12 (1) 2 3 resuelto, para mirar



① $98 = 100 - 2$

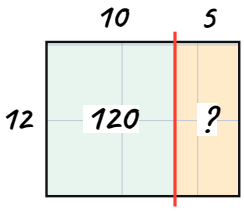
② $7 \times 98 = 7 \times 100 - 7 \times 2$

③ $= 700 - 14$

$= \boxed{686}$

Ejercicio 2 Doce por quince

3:29 1 (2) 3 complétenlo



① $15 = 10 + 5$

② $12 \times 15 = 12 \times 10 + 12 \times 5$

③ $= 120 + \square$

$= \square$

Ejercicio 3 Nueve por cuarenta y siete

4:15 1 2 (3) sin ayuda

$9 \times 47 =$

3 De cabeza: sacar el factor común

La distributiva también se lee **al revés**. En $37 \cdot 6 + 37 \cdot 4$, el 37 está en los dos productos: se saca, y queda $37 \cdot (6 + 4) = 37 \cdot 10 = 370$.

Ejercicio 4 Treinta y siete, dos veces

4:37 (1) 2 3 resuelto, para mirar

① $37 \times 6 + 37 \times 4 = 37 \times (6 + 4)$ *saco el 37*

② $= 37 \times 10 = \boxed{370}$



El orden de la hoja es el del video: partir, multiplicar cada pedazo y juntar.

Fase 3: el video les da 5 segundos. Pista: 47 está cerca de un número redondo.

en el video: **4:37**

De izquierda a derecha, la distributiva reparte; de derecha a izquierda, saca el factor común.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Ejercicio 5 Quince, con resta

4:53 (1) (2) (3) complétenlo

① $15 \times 13 - 15 \times 3 = 15 \times (\quad)$ saco el 15

② $= 15 \times \quad = \quad$

Ejercicio 6 Ocho, dos veces

5:26 (1) (2) (3) sin ayuda

$8 \times 125 + 8 \times 375 =$

En la papelería



6 cuadernos a $2950: casi $3000 cada uno.

Seis cuadernos a \$2950. El precio está cerca de \$3000: $6 \times 3000 = 18\,000$, y como cada cuaderno cuesta \$50 menos, se resta $6 \times 50 = 300$. Total: $18\,000 - 300 = \$17\,700$. Es la distributiva con la resta: $6(3000 - 50)$.



Ojo. La distributiva vale para la multiplicación sobre la suma y la resta. Con la división hay que tener cuidado: ¿se puede reagrupar? En el cuaderno de trabajo los espera esa pregunta (el video la deja abierta en el minuto 5:49).

Para recordar

1. Al sumar y al multiplicar, el orden no cambia el resultado; al restar y al dividir, sí.
2. El número de afuera multiplica a **cada** sumando: $a(b + c) = ab + ac$.
3. De cabeza, **partan un factor** o **saquen el factor común**.

Son las tres reglas del minuto 6:09 del video, con las mismas palabras.

en el video: **6:28**

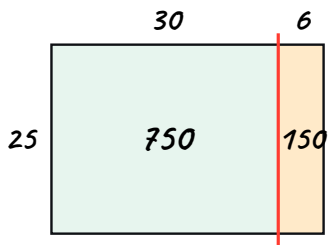
La respuesta a la pregunta

Ruta 1 · la asociativa

$25 \times 36 = 25 \times (4 \times 9) = (25 \times 4) \times 9 = 100 \times 9 = \boxed{900}$

Treinta y seis es cuatro por nueve; se reagrupa para que aparezca $25 \times 4 = 100$.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM



Ruta 2 · la distributiva

① $25 \times 36 = 25 \times 30 + 25 \times 6$

② $= 750 + 150$

$= \boxed{900}$ otra vez

Para qué les sirve

Esto no aparece con su nombre en 10.º y 11.º, pero casi todas sus lecciones lo usan, a través de otros temas: la distributiva vuelve con letras en la Lección 5.2, $3(x+5) = 3x + 15$. **Lo que sigue:** Lección 1.3, un chisme que se cuenta a tres amigos, y cada uno a tres más. ¿Hasta dónde llega?



¡Pregunta pagada! Dos rutas, el mismo 900.

Para seguir estudiando

Recursos

escaneen con la cámara del celular

La clase
video de 7:28, en la lección del curso

El short
el error típico en un minuto

La lista
todas las clases del módulo

Prompts para estudiar con IA

Péguenlos en un asistente de IA: están escritos para que les **pregunte**, no para que les responda. Y comprueben cada número: la IA también se equivoca con las cuentas.

1 Hágame 5 preguntas, una por una, en las que yo diga si una igualdad usa la conmutativa, la asociativa, la distributiva o un neutro. No me diga la respuesta: espere la mía y dígame solo si está bien.

2 Proponga 4 multiplicaciones para hacer de cabeza partiendo un factor (como 7×98). Pídame cómo partí el número antes del resultado. Si me equivoco, deme una pista, no la solución.

3 Le voy a explicar con un rectángulo por qué $3 \cdot (4+5)$ no es $12+5$. Hágame preguntas como un profesor hasta que yo mismo encuentre lo que me falte. No me corrija con la respuesta.

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM

Soluciones

Ej. 2. $12 \times 5 = 60$; $120 + 60 = 180$.

Ej. 3. $9 \times (50 - 3) = 450 - 27 = 423$.

Ej. 5. $13 - 3 = 10$; $15 \times 10 = 150$.

Ej. 6. $8 \times (125 + 375) = 8 \times 500 = 4000$.

Piénselo: las dos son falsas.



Escriban aquí lo que no les cerró. Una duda escrita se resuelve; una duda en la cabeza se olvida.

Referencias

Contenido Ficha P1-L2 del curso (v3 auditada) y guion del video P1-L2-clase v2: ejemplos, números y palabras.

Estándares MEN (2006). *Estándares básicos de competencias*, p. 84: 67N4 (propiedades de las operaciones) y 67N6 (justificar procedimientos con las propiedades). MEN (2016). *DBA Matemáticas* V.2, grado 6.º, DBA 2, p. 45.

Contenido OpenStax (2020). *Prealgebra* 2.ª ed., CC BY 4.0. §7.2 «Commutative and Associative Properties» (PDF p. 556) y §7.3 «Distributive Property» (PDF p. 566) **[por verificar]**. Van de Walle et al. (2019), p. 328, tabla 14.1 **[por verificar]**.

Errores Ryan y Williams (2007). *Children's Mathematics 4-15*, Apéndice 1, p. 188, ítems M8.21a y M8.21b: escribir $a - b = b - a$ y $a \div b = b \div a$. Booth et al. (2017), en Stewart (Ed.), *And the Rest Is Just Algebra*, p. 66 (PDF 83): los errores con los paréntesis afectan a estudiantes de todas las edades. El tajo y el «$2 \cdot (3 + 4) = 6 + 4$»: blueprint del canal «Multiplicar sin miedo», §4 y §6.

Didáctica Sweller, Ayres y Kalyuga (2011). *Cognitive Load Theory*, p. 172 (PDF 192): resuelto → con hueco → sin ayuda. Clark y Mayer (2016), p. 209 (PDF 229): vocabulario antes del procedimiento. Muller (2008), pp. 165 y 199: predecir antes de ver.

Imágenes Cuadernos: utroja0, Wikimedia Commons, «Notebooks-rainbow.jpg», CC0. Zumbi, rectángulos, cajas e íconos pixel: dibujados por código (*CREDITOS.md*).

Sus notas: dudas para llevar a la clase

PROF. JUAN DIEGO ANDRÉS · JUANDIEGOANDRES.COM